CONCOURS COMMUN MINES-PONTS-TELECOM-SUP'AERO... 1976

OPTION M - 1ERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de l'option M, comporte 4 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

NOTATIONS

Si E est un espace vectoriel euclidien (de dimension quelconque), et si (x,y) appartient à E^2, les notations $(x|y)$, $\|x\|$, désignent respectivement le produit scalaire des vecteurs x et y, et la norme euclidienne du vecteur x.

L'objet du problème est l'étude de certaines propriétés des endomorphismes symétriques de E, c'est-à-dire des endomorphismes u de E tels que l'on ait : $(u(x)|y) = (x|u(y))$ pour tout (x,y) appartenant à E^2.

Si u est un endomorphisme de E, on désigne par :

- $\Lambda(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u (éventuellement vide)
- $S(u)$ l'ensemble des réels λ tels que $u - \lambda 1_E$ ne soit pas inversible (1_E désignant l'application identique de E).
- E_λ^u l'espace propre de u associé au réel λ (si λ appartient à $\Lambda(u)$) .

On note $\mathcal{L}_c(E)$ l'espace vectoriel réel des applications linéaires continues de E dans E, et B la boule unité fermée de E. On rappelle que $\mathcal{L}_c(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bornés sur B ; pour u appartenant à $\mathcal{L}_c(E)$ on note $|||u|||$ le réel défini par : $|||u||| = \sup_{x \in B} \|u(x)\|$, ce qui permet de considérer l'espace vectoriel normé $(\mathcal{L}_c(E) ; ||| \; |||)$.

PARTIE I

On suppose dans cette partie que E est de dimension finie, non nulle, et on désigne par Q l'ensemble des formes quadratiques sur E.

I - 1. Munir Q d'une structure d'espace vectoriel réel ; exprimer sa dimension à l'aide de celle de E.

I - 2. Soit q un élément de Q .

a) Montrer qu'il existe, et de façon unique, un endomorphisme symétrique u_q de E tel que l'on ait $q(x) = (u_q(x) \mid x)$ pour tout x de E.

b) Montrer que $\sup_{x \in E - \{0\}} \left(\frac{|(u_q(x)|x)|}{\|x\|^2} \right)$ est un réel, que l'on note n(q), et que l'application $q \longmapsto n(q)$ de Q dans l'ensemble des réels positifs ou nuls est une norme.

.../...

c) Exprimer le réel $n(q)$ à l'aide des éléments de $S(u_q)$.

d) En déduire que l'on a : $n(q) = \sup_{x \in E - \{0\}} \left(\frac{\|u_q(x)\|}{\|x\|} \right)$

I - 3. Dans cette question seulement, on donne un entier N strictement positif, et l'on considère $E = \mathbb{R}^{2N}$ muni de sa structure euclidienne canonique. On note u l'endomorphisme symétrique de E dont la matrice dans la base canonique de E est :

$$\begin{pmatrix} O_N & I_N \\ I_N & O_N \end{pmatrix}$$

où : I_N est la matrice unité d'ordre N

O_N est la matrice nulle d'ordre N

Montrer qu'il existe, et de façon unique, un élément q de Q tel que $u = u_q$. Déterminer la signature de q et la valeur du réel $n(q)$.

I - 4. On désigne par Q^+ l'ensemble des formes quadratiques définies positives sur E ; montrer que Q^+ est un ouvert de l'espace vectoriel normé (Q,n). [On pourra utiliser, après l'avoir démontrée, l'équivalence, pour q élément de Q : $q \in Q^+ \iff \inf_{\|x\|=1} (q(x)) > 0$].

PARTIE II

On ne fait plus désormais l'hypothèse que E est de dimension finie. Dans toute cette partie, on considère un endomorphisme symétrique u de E, élément de $\mathcal{L}_c(E)$, non nul.

II - 1. Montrer l'inégalité $\sup_{x \in B} \left(|(u(x)|x)| \right) \leq |||u|||$,

et l'égalité : $|||u||| = \sup_{(x,y) \in B^2} |(u(x)|y)|$

II - 2. En déduire que : $|||u||| = \sup_{x \in B} \left(|(u(x)|x)| \right) = \sup_{x \in E - \{0\}} \left(\frac{|(u(x)|x)|}{\|x\|^2} \right)$

[On pourra désigner par M la borne supérieure des $|(u(x)|x)|$ pour x dans B et montrer que $|||u||| \leq M$] .

II - 3. On suppose dans tout ce qui suit que u vérifie la propriété suivante :

(P) : L'adhérence de u(B) dans E est une partie compacte de E, ce qui veut dire que de toute suite de u(B) on peut extraire une suite qui converge dans E.

II - 3. A - Etude d'un exemple

E est ici l'espace vectoriel des fonctions continues sur [0,1] et à valeurs dans R muni du produit scalaire défini par :

$$\left(\forall\ (f,g) \in E^2 \right) : \quad \left((f|g) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \right)$$

.../...

Soit K(x,y) un polynôme aux deux indéterminés x et y, symétrique, (K(x,y) = K(y,x)) et à coefficients réels.

Pour tout f appartenant à E, on désigne par u(f) l'application définie sur [0,1] par :

$$(\forall t \in [0,1]) : \left(u(f)(t) = \int_0^1 K(x,t)\, f(x)\, dx\right) .$$

a) Montrer que u(f) est un élément de E et que l'application $f \longmapsto u(f)$ de E dans E est linéaire et continue.

b) Démontrer que l'endomorphisme u est symétrique et que l'image u(E) est un sous-espa vectoriel de E de dimension finie.

c) En déduire que u vérifie la propriété (P) .

II - 3. B - On revient au cas général, c'est-à-dire qu'on suppose à nouveau E quelcon

a) Quitte à changer u en -u, montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points dans E qui vérifie :

(i) : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \left(\|x_n\| = 1\right)$

(i,i) : $\lim_{n\to\infty} \left(u(x_n) \mid x_n\right) = |||u|||$

(i,i,i) : il existe y dans E tel que : $\lim_{n\to\infty} u(x_n) = |||u|||\, y$

b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y et en déduire que y est vecteur propre de u associé au réel $|||u|||$.

II - 4. a) Si v appartient à $\mathcal{L}_c(E)$, et N appartient à $\mathbb{N}$, on pose :

$$w_N = \sum_{p=0}^{N} (-1)^p v^p \quad \text{où } v^p = v \circ \cdots\cdots \circ v \text{ est l'itérée p fois de v,}$$

avec en particulier $v^0 = 1_E$. Montrer que si $|||v||| < 1$, la suite de terme général w_N est une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}_c(E)\ ;\ |||\ |||)$.

b) Calculer le produit $(1_E + v) \circ w_N$.

On suppose dans tout ce qui suit que $(\mathcal{L}_c(E)\ ;\ |||\ |||$ est complet, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy de $(\mathcal{L}_c(E)\ ,\ |||\ |||\ )$ converge dans $\mathcal{L}_c(E)$.

Montrer qu'alors, si v dans $\mathcal{L}_c(E)$ vérifie $|||v||| < 1$, l'endomorphisme $1_E + v$ est inversible.

c) Déduire de ce qui précède que S(u) est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$ contenue dans l'intervalle $[-|||u|||\ ,\ |||u|||\ ]$.

.../...

II - 5. Soit ε un réel strictement positif ; on suppose que l'ensemble $\{ \lambda \in \Lambda(u) : |\lambda| > \varepsilon \}$ est infini .

a) Montrer qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\Lambda(u)$, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E qui vérifient :

(i) : $(\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2)\ \left(p \neq q \Longrightarrow \lambda_p \neq \lambda_q\right)$.

(i,i) : Il existe un réel λ non nul tel que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$.

(i,i,i) : Pour tout entier n, x_n appartient à $E^u_{\lambda_n}$

(i v) : $(\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2)\ \left(p \neq q \Longrightarrow \| x_p - x_q \| = \sqrt{2}\right)$.

(v) : La suite de terme général $u(x_n)$ est convergente.

b) Aboutir à une contradiction ; en déduire le résultat suivant :

- ou bien $\Lambda(u)$ est fini
- ou bien il existe une bijection $n \longmapsto \lambda_n$ de $\mathbb{N}$ sur $\Lambda(u)$ avec: $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.

II - 6. On suppose que u est inversible dans $\mathcal{L}_c(E)$ et que la forme quadratique $q : x \longmapsto (u(x)|x)$ est positive et n'admet pas de vecteur isotrope autre que o .

Montrer, à l'aide des résultats précédents, que $\Lambda(u)$ est une partie finie de l'ensemble des réels strictement positifs.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail